



最优化方法

东南大学
机&人工 能学

songmf@seu.edu.cn



引言



学
最小二 和 性

题
和内
性
发



学





学



学

问题/ 学



学



学

问题/ 学

❖ 从一个可行 合中 出最 的元



学



□ 学 问题/ 学

❖ 从一个可行 合中 出最 的元

□ 学



学



□ 学 问题/ 学

❖ 从一个可行 合中 出最 的元

□ 学

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m\end{array}$$



学



□ 学 问题/ 学

❖ 从一个可行 合中 出最 的元

□ 学

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m\end{array}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ 变量



学



□ 学 问题/ 学

❖ 从一个可行 合中 出最 的元

□ 学

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m\end{array}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ 变量

$$f_0 : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$



学



□ 学 问题/ 学

❖ 从一个可行 合中 出最 的元

□ 学

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m\end{array}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ 变量

$$f_0 : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

$$f_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, \quad i = 1, \dots, m$$



学



□ 学 问题/ 学

❖ 从一个可行 合中 出最 的元

□ 学

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m\end{array}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ 变量

$$f_0 : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

$$f_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, \quad i = 1, \dots, m$$

□ 最 在所有满足约束的向量中，向量 x^* 对应的目标函数值最小。



应用





应用



合
变
量
总
总
风

分
每
一
回

的

本
的
本

最小收



应用



合
变量总
总风
中的
变量工
总

分 的 本 本
每一 回
件
件的长和
时间要

最小收



电子

最大面



应用



- 合变量总风中的件件的长和时间要最大面
- 电子 合变量总风中的件件的长和时间要最大面
- 合变量总风中的件件的长和时间要最大面



问题





问题



□ 一 的 问题



问题

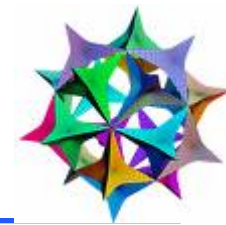


□ 一 的 问题

❖ 难以



问题



□ 一 的 问题

❖ 难以

❖ 中 长时间的 不到



问题



□ 一 的 问题

❖ 难以

❖ 中 长时间的 不到

□ 外 定问题 在高 可 的 法



问题



□ 一 的 问题

- ❖ 难以

- ❖ 中 长时间的 不到

□ 外 定问题 在高 可 的 法

- ❖ 最小二

- ❖ 性



问题



□ 一 的 问题

- ❖ 难以

- ❖ 中 长时间的 不到

□ 外 定问题 在高 可 的 法

- ❖ 最小二

- ❖ 性

- ❖ 问题



最小二





最小二



$$\text{minimize } \|Ax - b\|_2^2$$



最小二



$$\text{minimize } \|Ax - b\|_2^2$$

□ 最小二



最小二



$$\text{minimize } \|Ax - b\|_2^2$$

□ 最小二
◆

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$$



最小二



$$\text{minimize } \|Ax - b\|_2^2$$

□ 最小二



有可 $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$ 有的 法和 件



最小二



$$\text{minimize } \|Ax - b\|_2^2$$

□ 最小二



$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$$



有可有的法和件



时间正比于 $n^2 k$ ($A \in \mathbf{R}^{k \times n}$) A 有

结

更快



最小二



$$\text{minimize } \|Ax - b\|_2^2$$

□ 最小二



$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$$



有可有的法和件



时间正比于 $n^2 k$ ($A \in \mathbf{R}^{k \times n}$) A 有



更快



结
成

□ 最小二 的 用



最小二



$$\text{minimize } \|Ax - b\|_2^2$$

□ 最小二



$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$$



有可有的法和件



时间正比于 $n^2 k$ ($A \in \mathbf{R}^{k \times n}$) A 有



更快



结
成

□ 最小二的用



别十分



最小二



$$\text{minimize } \|Ax - b\|_2^2$$

□ 最小二



$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$$



性





性



$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m\end{array}$$



性



$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m\end{array}$$

□ 性





性



$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$



性



没有

有可

时间

快

有的

正比于 $n^2 m$ if $m \geq n$

法和

件

有

结

更



性



$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m\end{array}$$



性



没有

有可

时间

有的

正比于 n^2m if $m \geq n$

法和

件

有

结

更

快

成



性



$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

- 性
- ❖ 没有可时间 有的法和件
- ❖ 有可时间 有正比于 n^2m if $m \geq n$ 有 结 更
- ❖ 快成
- 性 的 用



性



$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

- 性
 - ❖ 没有可有的法和件
 - ❖ 有段时间正比于 n^2m if $m \geq n$ 有 结 更
 - ❖ 快成
- 性的用
 - ❖ 别难于最小二



性



$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

- 性
 - ❖ 没有可时间正比于 n^2m if $m \geq n$ 有 结 更
 - ❖ 快成
- 性 的 用
 - ❖ 别难于最小二
 - ❖ 一些 的 可用于将 些问题转 为 性 分
 - 性方 的问题



问题





问题



$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{array}$$



问题



$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{array}$$



和 为



问题



$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m.\end{array}$$



和 为

$$f_i(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f_i(x) + \beta f_i(y)$$



$$\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$$



问题



$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m.\end{array}$$



和 为

$$f_i(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f_i(x) + \beta f_i(y)$$



$$\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$$



最小二 和 性 为 的 问题



问题





问题



问题



问题



问题

❖ 没有



问题



问题

- ❖ 没有
- ❖ 有可 有 的 法



问题



问题

- ❖ 没有
- ❖ 有可 有 的 法
- ❖ 时间 正比于 $\max\{n^3, n^2m, F\}$ F 是对
的 一 和二 的



问题



问题

- ❖ 没有
- ❖ 有可 有 的 法
- ❖ 时间 正比于 $\max\{n^3, n^2m, F\}$ F 是对
- ❖ 的 一 和二 的
- ❖ 几 成



问题



问题

- ❖ 没有
- ❖ 有可 有 的 法
- ❖ 时间 正比于 $\max\{n^3, n^2m, F\}$ F 是对
- 的 一 和二 的
- ❖ 几 成



的 用



问题



问题

- ❖ 没有
- ❖ 有可 有 的 法
- ❖ 时间 正比于 $\max\{n^3, n^2m, F\}$ F 是对
- 的 一 和二 的
- ❖ 几 成



的 用

- ❖ 通 很难 别
- ❖ 有很多 可以将其他问题转 为



问题



问题

- ❖ 没有
- ❖ 有可 有 的 法
- ❖ 时间 正比于 $\max\{n^3, n^2m, F\}$ F 是对
- 的 一 和二 的
- ❖ 几 成



的 用

- ❖ 通 很难 别
- ❖ 有很多 可以将其他问题转 为
- ❖ 很多问题可以通过 进行



题





题

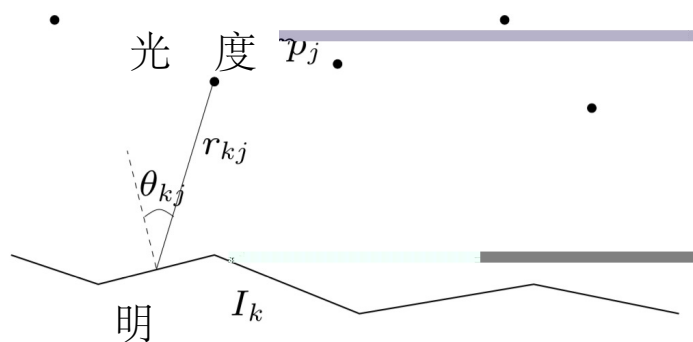




题



□ M 用于 n 面小平面的明第 k 块区块的照明强度 I_k 和灯光强度 p_j 线性相关

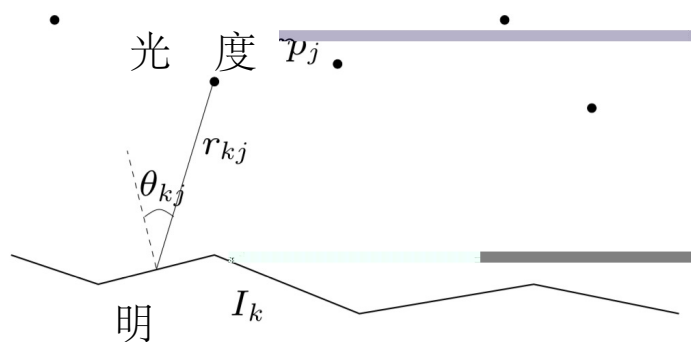




题



□ M 用于 n 面小平面的明第 k 块区块的照明强度 I_k 和灯光强度 p_j 线性相关



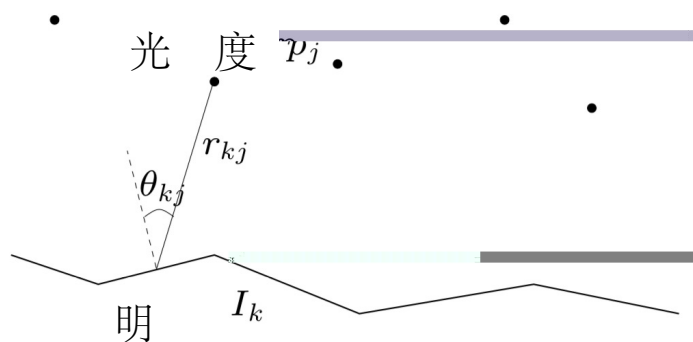
$$I_k = \sum_{j=1}^m a_{kj} p_j, \quad a_{kj} = r_{kj}^{-2} \max\{\cos \theta_{kj}, 0\}$$



题



□ M 用于 n 面小平面的照明第 k 块区块的照明强度 I_k 和灯光强度 p_j 线性相关



$$I_k = \sum_{j=1}^m a_{kj} p_j, \quad a_{kj} = r_{kj}^{-2} \max\{\cos \theta_{kj}, 0\}$$

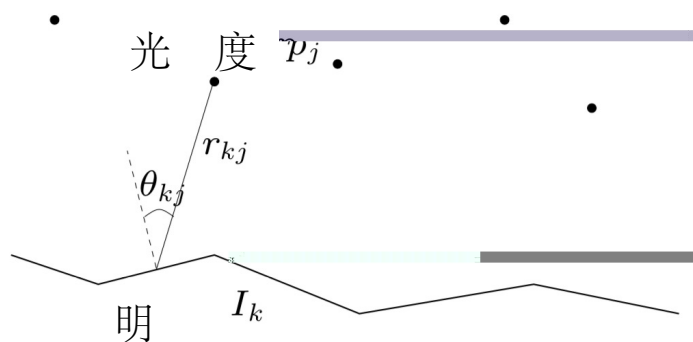
□ 问题：在有约束的灯光强度下获取理想的照明强度



题



□ M 用于 n 面小平面的明第 k 块区块的照明强度 I_k 和灯光强度 p_j 线性相关



$$I_k = \sum_{j=1}^m a_{kj} p_j, \quad a_{kj} = r_{kj}^{-2} \max\{\cos \theta_{kj}, 0\}$$

□ 问题：在有约束的灯光强度下获取理想的照明强度

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \max_{k=1, \dots, n} |\log I_k - \log I_{\text{des}}| \\ & \text{subject to} && 0 \leq p_j \leq p_{\text{max}}, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$



如





如



用最小二

minimize $\sum_{k=1}^n (I_k - I_{\text{des}})^2$

正

❖ 得到的 p_j 超出



如



□ 用最小二

$$\text{minimize } \sum_{k=1}^n (I_k - I_{\text{des}})^2$$

正

❖ 得到的 p_j 超出

□ 用带 的最小二

$$\text{minimize } \sum_{k=1}^n (I_k - I_{\text{des}})^2 + \sum_{j=1}^m w_j (p_j - p_{\text{max}}/2)^2,$$



如



□ 用最小二

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^n (I_k - I_{\text{des}})^2$$

正

❖ 得到的 p_j 超出

□ 用带 的最小二

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^n (I_k - I_{\text{des}})^2 + \sum_{j=1}^m w_j (p_j - p_{\text{max}}/2)^2,$$

❖ 重 到 $0 \leq p_j \leq p_{\text{max}}$



如



□ 用最小二

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^n (I_k - I_{\text{des}})^2$$

正

❖ 得到的 p_j 超出

□ 用带 的最小二

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^n (I_k - I_{\text{des}})^2 + \sum_{j=1}^m w_j (p_j - p_{\text{max}}/2)^2$$

❖ 重 到 $0 \leq p_j \leq p_{\text{max}}$

□ 用 性

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \max_{k=1, \dots, n} |I_k - I_{\text{des}}| \\ &\text{subject to} \quad 0 \leq p_j \leq p_{\text{max}}, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$



如



□ 用最小二

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^n (I_k - I_{\text{des}})^2$$

正

❖ 得到的 p_j 超出

□ 用带 的最小二

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^n (I_k - I_{\text{des}})^2 + \sum_{j=1}^m w_j (p_j - p_{\text{max}}/2)^2$$

❖ 重 到 $0 \leq p_j \leq p_{\text{max}}$

□ 用 性

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \max_{k=1, \dots, n} |I_k - I_{\text{des}}| \\ &\text{subject to} \quad 0 \leq p_j \leq p_{\text{max}}, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

□ 然 上 法 为 法



用





用



$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_0(p) = \max_{k=1, \dots, r} h(I_k / I_{\text{des}}) \\ \text{subject to} \quad & 0 \leq p_j \leq p_{\max}, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$



用



$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f_0(p) = \max_{k=1, \dots, r} h(I_k / I_{\text{des}}) \\ &\text{subject to} && 0 \leq p_j \leq p_{\max}, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$



$$h(u) = \max\{u, 1/u\}$$



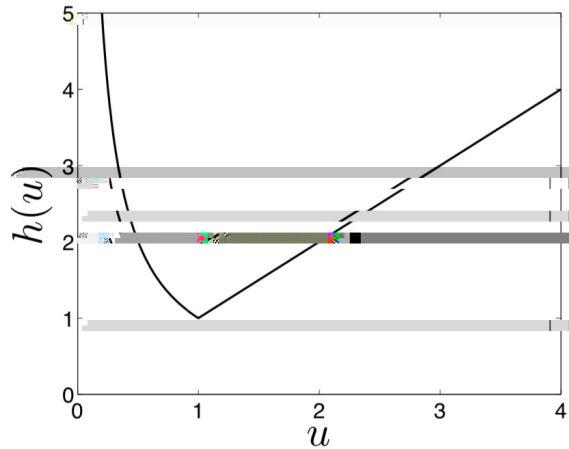
用



minimize $f_0(p) = \max_{k=1, \dots, m} h(I_k / I_{\text{des}})$
 subject to $0 \leq p_j \leq p_{\max}, \quad j = 1, \dots, m$



$$h(u) = \max\{u, 1/u\}$$





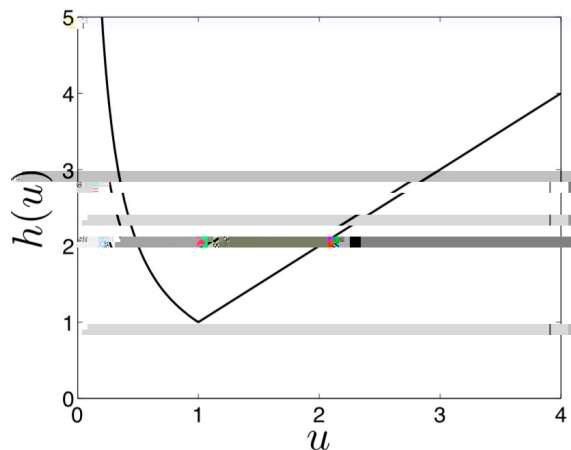
用



$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f_0(p) = \max_{k=1, \dots, m} h(I_k / I_{\text{des}}) \\ &\text{subject to} && 0 \leq p_j \leq p_{\max}, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$



$$h(u) = \max\{u, 1/u\}$$



为 多个 的最大 为



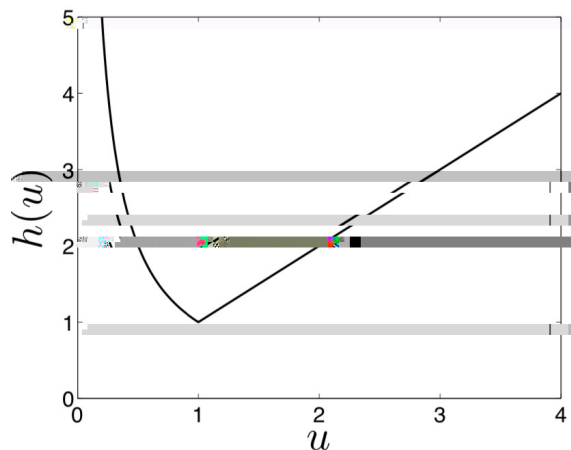
用



$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f_0(p) = \max_{k=1, \dots, m} h(I_k / I_{\text{des}}) \\ &\text{subject to} && 0 \leq p_j \leq p_{\max}, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$



$$h(u) = \max\{u, 1/u\}$$



为 多个 的最大 为



的 比最小二 法 大





外 增加会 问题

❖ 意**10** 的 明 度不会超过总能量的一

❖ 打开的 不超过总 的一



- 外 增加会 问题
- ❖ 意**10** 的 明 度不会超过总能量的一
- ❖ 打开的 不超过总 的一

- 增加条件**1** 问题 然很 增加
- 条件**2** 大大增加问题的难度



- 意外增加问题
❖ 注意10 的明度不会超过总能量的一
❖ 打开的不超过总的一

- 增加条件1 问题 然很 增加
条件2 大大增加问题的难度

- 意识觉不总是正 没有 知
的问题和 难的问题看起来会十分相



和內





和內



- ❖ 能 将一些问题 为 问题
- ❖ 能 有一定 的 问题
- ❖ 对 过 的性能进行分



和內



- ❖ 能 将一些问题 为 问题
- ❖ 能 有一定 的 问题
- ❖ 对 过 的性能进行分



性





性



的问题 路



性



□ 的 问题 路

□ 部



性



- 的问题 路
- 部
- ❖ 在可行 中 最小的点



性



- 的问题 路
- 部
 - ❖ 在可行 中 最小的点
 - ❖ 度快



性



- 的问题 路
- 部
 - ❖ 在可行 中 最小的点
 - ❖ 度快
 - ❖ 要



性



- 的问题 路
- 部
 - ❖ 在可行 中 最小的点
 - ❖ 度快
 - ❖ 要
 - ❖ 不能 和全 最 的信息



性



- 的问题 路
- 部
 - ❖ 在可行 中 最小的点
 - ❖ 度快
 - ❖ 要
 - ❖ 不能 和全 最 的信息
- 全



性



□ 的问题 路

□ 部

❖ 在可行 中 最小的点

❖ 度快

❖ 要

❖ 不能 和全 最 的信息

□ 全

❖ 时间和问题

增长



性



- 的问题 路
- 部
 - ❖ 在可行 中 最小的点
 - ❖ 度快
 - ❖ 要
 - ❖ 不能 和全 最 的信息
- 全
 - ❖ 时间和问题 增长
- 上 方法大多 于 的子问题



发





发



□ 分 理 **1900-1970**



发



- 分 理 **1900-1970**
- 法



发



□ 分 理 **1900-1970**

□ 法

❖ **1939:** 性



发



☐ 分 理 **1900-1970**

☐ 法

❖ **1939:** 性

❖ **1947:** 法



发



- 分 理 **1900-1970**
- 法
 - ❖ **1939:** 性
 - ❖ **1947:** 法
 - ❖ **1960年** 早期的内点法



发



- 分 理 **1900-1970**
- 法
 - ❖ **1939:** 性
 - ❖ **1947:** 法
 - ❖ **1960年** 早期的内点法
 - ❖ **1970年** 法和其他次 度法



发



□ 分 理 **1900-1970**

□ 法

❖ **1939:** 性

❖ **1947:** 法

❖ **1960年** 早期的内点法

❖ **1970年** 法和其他次 度法

❖ **1980年** 面向 性 的多 时间的内点法



发



□ 分 理 **1900-1970**

□ 法

❖ **1939:** 性

❖ **1947:** 法

❖ **1960年** 早期的内点法

❖ **1970年** 法和其他次 度法

❖ **1980年** 面向 性 的多 时间的内点法

❖ **1980年** 后期 今 面向 性 的多 时间
的内点法



发



- 分 理 **1900-1970**
- 法
 - ❖ **1939:** 性
 - ❖ **1947:** 法
 - ❖ **1960年** 早期的内点法
 - ❖ **1970年** 法和其他次 度法
 - ❖ **1980年** 面向 性 的多 时间的内点法
 - ❖ **1980年** 后期 今 面向 性 的多 时间
的内点法
- 应用



发



□ 分 理 **1900-1970**

□ 法

❖ **1939:** 性

❖ **1947:** 法

❖ **1960年** 早期的内点法

❖ **1970年** 法和其他次 度法

❖ **1980年** 面向 性 的多 时间的内点法

❖ **1980年** 后期 今 面向 性 的多 时间
的内点法

□ 应用

❖ **1990前** 工 应用很少



发



□ 分 理 1900-1970

□ 法

❖ 1939: 性

❖ 1947: 法

❖ 1960年 早期的内点法

❖ 1970年 法和其他次 度法

❖ 1980年 面向 性 的多 时间的内点法

❖ 1980年 后期 今 面向 性 的多 时间
的内点法

□ 应用

❖ 1990前 工 应用很少

❖ 自1990年 工 应用开 增多
电路 新的问题

信 理 通
正定 等