最　化方法

东南大学

计算机&人工　能学

飞

@　.　.

不等　　的　小化

不等 的 小化

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& Ax = b
\end{array}
$$

不等 的 小化

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
 & Ax = b
\end{array}
$$

数f为 数 二次连续可微

不等　　　的　小化

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& Ax = b
\end{array}
$$

数f为　　数　二次连续可微

$A \in \mathbf{R}^{p \times n}$ with $\mathbf{rank}\, A = p$

不等 的 小化

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b \end{array}$$

数f为 数 二次连续可微

$A \in \mathbf{R}^{p \times n}$ with $\mathbf{rank}\, A = p$

最 $p^\star$ 为有 在

不等　　　的　小化

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b \end{array}$$

数f为　　数　二次连续可微

$A \in \mathbf{R}^{p \times n}$ with $\mathbf{rank}\, A = p$

最　　$p^\star$为有　　　在

问题为　格可行　　在$\tilde{x}$ 满

不等 的 小化

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b \end{array}$$

数f为 数 二次连续可微

$A \in \mathbf{R}^{p \times n}$ with $\mathbf{rank}\, A = p$

最 $p^\star$为有 在

问题为 格可行 在 $\tilde{x}$ 满

$$\tilde{x} \in \mathbf{dom}\, f_0, \qquad f_i(\tilde{x}) < 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad A\tilde{x} = b$$

不等　　　的　小化

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& Ax = b
\end{array}
$$

数f为　　数　二次连续可微

$A \in \mathbf{R}^{p \times n}$ with $\mathbf{rank}\, A = p$

最　　$p^\star$为有　　　在

问题为　格可行　　在$\tilde{x}$满

$$\tilde{x} \in \mathbf{dom}\, f_0, \qquad f_i(\tilde{x}) < 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad A\tilde{x} = b$$

因此　　有强对　　对　　化　在

子

子

- 线性 二次 二次 的二次

子

- 线性　　　　　二次　　　　　二次　　　的二次
- 　于线性不等　　　　　的　最大化

子

- 线性 二次 二次 的二次
- 于线性不等 的 最大化

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \\ \text{subject to} & Fx \preceq g \\ & Ax = b\end{array}$$

子

- 线性 二次 二次 的二次
- 于线性不等 的 最大化

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \\ \text{subject to} & Fx \preceq g \\ & Ax = b \end{array}$$

- 其中 $\mathbf{dom}\, f_0 = \mathbf{R}^n_{++}$

子

- 线性 二次 二次 的二次
- 于线性不等 的 最大化

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \\ \text{subject to} & Fx \preceq g \\ & Ax = b\end{array}$$

- 其中 $\mathbf{dom}\, f_0 = \mathbf{R}_{++}^n$
- 可微性需要重 化问题

子

- 线性 二次 二次 的二次
- 于线性不等 的 最大化

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{i=1}^n x_i \log x_i \\ \text{subject to} & Fx \preceq g \\ & Ax = b \end{array}$$

- 其中 $\mathbf{dom}\, f_0 = \mathbf{R}^n_{++}$
- 可微性需要重 化问题
  - 分 线性 小化

子

- 线性 二次 二次 的二次
- 于线性不等 的 最大化

$$\begin{array}{ll} \textsf{minimize} & \sum_{i=1}^n x_i \log x_i \\ \textsf{subject to} & Fx \preceq g \\ & Ax = b \end{array}$$

- 其中 $\mathbf{dom}\, f_0 = \mathbf{R}_{++}^n$
- 可微性需要重 化问题
  - 分 线性 小化
  - 于线性 的 数 近

对数

对数

- 通过 性 数重 化不等 问题

对数

- 通过 性 数重 化不等 问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} I_-(f_i(x)) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{array}$$

对数

- 通过 性 数重 化不等 问题

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} I_-(f_i(x)) \\
\text{subject to} & Ax = b
\end{array}
$$

- 其中 $I_-(u) = 0$ if $u \le 0$, $I_-(u) = \infty$ otherwise

对数

- 通过　性　数重　　化不等　　　问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) + \sum_{i=1}^m I_-(f_i(x)) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{array}$$

- 其中　$I_-(u) = 0$ if $u \le 0$, $I_-(u) = \infty$ otherwise
- 通过对数　　近

对数

- 通过 性 数重 化不等 问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) + \sum_{i=1}^m I_-(f_i(x)) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{array}$$

- 其中 $I_-(u) = 0$ if $u \le 0$, $I_-(u) = \infty$ otherwise
- 通过对数 近

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) - (1/t) \sum_{i=1}^m \log(-f_i(x)) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{array}$$

对数

- 通过 性 数重 化不等 问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) + \sum_{i=1}^m I_-(f_i(x)) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{array}$$

- 其中 $I_-(u) = 0$ if $u \leq 0$, $I_-(u) = \infty$ otherwise
- 通过对数 近

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) - (1/t) \sum_{i=1}^m \log(-f_i(x)) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{array}$$

- 为等 问题

对数

- 通过 性 数重 化不等 问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) + \sum_{i=1}^m I_-(f_i(x)) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{array}$$

- 其中 $I_-(u) = 0$ if $u \le 0$, $I_-(u) = \infty$ otherwise
- 通过对数 近

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) - (1/t) \sum_{i=1}^m \log(-f_i(x)) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{array}$$

- 为等 问题
- $t > 0$, $-(1/t)\log(-u)$为 I_-的平 近

对数

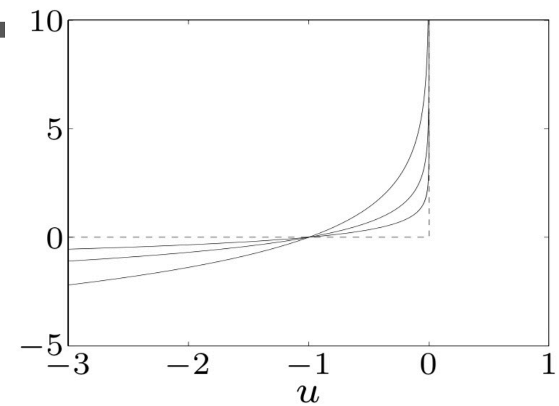
- 通过 性 数重 化不等 问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} I_-(f_i(x)) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{array}$$

- 其中 $I_-(u) = 0$ if $u \le 0$, $I_-(u) = \infty$ otherwise
- 通过对数 近

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) - (1/t) \sum_{i=1}^{m} \log(-f_i(x)) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{array}$$

- 为等 问题
- $t > 0$, $-(1/t)\log(-u)$为 I_-的平 近
- 近 度随 $t \to \infty$ 提高



对数　　　　　数

对数 数

$\phi(x) = -\sum_{i=1}^{m}$ l[redacted]

对数　　　数

$$\phi(x) = -\sum_{i=1}^{m} \log(-f_i(x)), \quad \mathbf{dom}\,\phi = \{x \mid f_1(x) < 0, \ldots, f_m(x) < 0\}$$

- 合　　为　　数

对数 数

$$\phi(x) = -\sum_{i=1}^{m} \log(-f_i(x)), \qquad \mathbf{dom}\,\phi = \{x \mid f_1(x) < 0, \ldots, f_m(x) < 0\}$$

- 合 为 数
- 二 可微连续 数 数为

对数　　数

$$\phi(x) = -\sum_{i=1}^{m} \log(-f_i(x)), \quad \mathbf{dom}\,\phi = \{x \mid f_1(x) < 0, \ldots, f_m(x) < 0\}$$

- 　　合　　为　　数
- 二　可微连续　数　　数为

$$\nabla\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{-f_i(x)} \nabla f_i(x)$$

$$\nabla^2\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{f_i(x)^2} \nabla f_i(x) \nabla f_i(x)^T + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{-f_i(x)} \nabla^2 f_i(x)$$

中心路

中心路

- 对$t > 0$ 定 $x^*(t)$为如下问题的解

中心路

- 对$t > 0$ 定 $x^*(t)$为如下问题的解

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t f_0(x) + \phi(x) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{array}$$

中心路

- 对$t > 0$ 定 $x^*(t)$为如下问题的解

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & t f_0(x) + \phi(x) \\ \text{subject to} & Ax = b\end{array}$$

  - 此时 $x^*(t)$ 在 一

中心路

- 对$t > 0$　定　$x^*(t)$为如下问题的解

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t f_0(x) + \phi(x) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{array}$$

  - 此时　　$x^*(t)$　在　　一

- 中心路　为 $\{x^\star(t) \mid t > 0\}$

中心路

- 对$t > 0$ 定 $x^*(t)$为如下问题的解

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t f_0(x) + \phi(x) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{array}$$

- 此时 $x^*(t)$ 在 一

- 中心路 为 $\{x^\star(t) \mid t > 0\}$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \le b_i, \quad i = 1, \ldots, 6 \end{array}$$

中心路

- 对$t > 0$　定　$x^*(t)$为如下问题的解

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t f_0(x) + \phi(x) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{array}$$

  - 此时　$x^*(t)$　在　一

- 中心路　为 $\{x^\star(t) \mid t > 0\}$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \le b_i, \quad i = 1, \ldots, 6 \end{array}$$

- 超平面 $c^T x = c^T x^\star(t)$ 与 ϕ 的等　线

中心路

- 对 $t > 0$ 定 $x^*(t)$ 为如下问题的解

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & t f_0(x) + \phi(x) \\ \text{subject to} & Ax = b\end{array}$$

  - 此时 $x^*(t)$ 在 一

- 中心路 为 $\{x^\star(t) \mid t > 0\}$

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \le b_i, \quad i = 1, \ldots, 6\end{array}$$

- 超平面 $c^T x = c^T x^\star(t)$ 与 ϕ 的等 线
- 相 于 $x^*(t)$

中心路

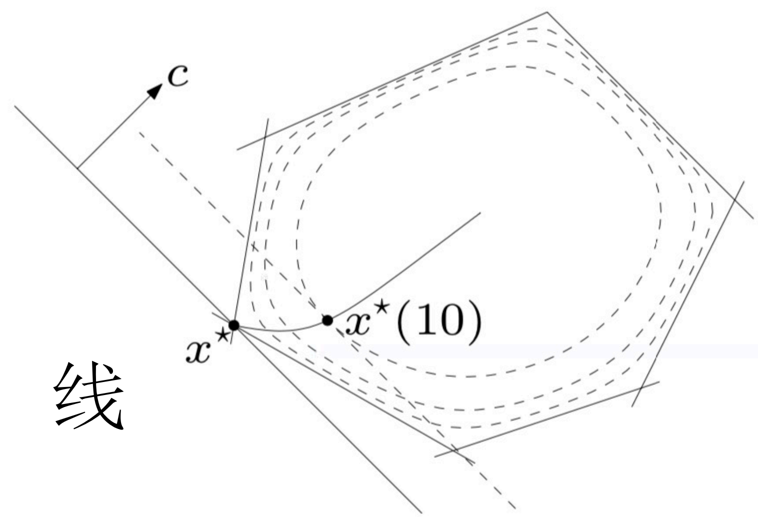
- 对$t > 0$ 定 $x^*(t)$为如下问题的解

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & t f_0(x) + \phi(x) \\ \text{subject to} & Ax = b\end{array}$$

  - 此时 $x^*(t)$ 在 一

- 中心路 为 $\{x^\star(t) \mid t > 0\}$

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \le b_i, \quad i = 1, \dots, 6\end{array}$$



- 超平面 $c^T x = c^T x^\star(t)$ 与 ϕ 的等 线
- 相 于$x^*(t)$

中心路　的对　点

中心路 的对 点

- $x = x^*(t)$ 在w满

中心路 的对 点

- $x = x^*(t)$ 在w满

$$t\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{-f_i(x)} \nabla f_i(x) + A^T w = 0, \qquad Ax = b$$

中心路 的对 点

- $x = x^*(t)$ 在w满

$$t\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{-f_i(x)} \nabla f_i(x) + A^T w = 0, \qquad Ax = b$$

- 因此 $x^*(t)$最小化**L** 数

中心路 的对 点

- $x = x^*(t)$ 在w满

$$t\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{-f_i(x)}\nabla f_i(x) + A^T w = 0, \qquad Ax = b$$

- 因此 $x^*(t)$最小化**L** 数

$$L(x, \lambda^\star(t), \nu^\star(t)) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^\star(t) f_i(x) + \nu^\star(t)^T(Ax - b)$$

中心路 的对 点

- $x = x^*(t)$ 在w满

$$t\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{-f_i(x)} \nabla f_i(x) + A^T w = 0, \qquad Ax = b$$

- 因此 $x^*(t)$最小化L 数

$$L(x, \lambda^\star(t), \nu^\star(t)) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^\star(t) f_i(x) + \nu^\star(t)^T (Ax - b)$$

- 其中 定 $\lambda_i^\star(t) = 1/(-t f_i(x^\star(t)))$ and $\nu^\star(t) = w/t$

中心路 的对 点

- $x = x^*(t)$ 在w满

$$t\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{-f_i(x)}\nabla f_i(x) + A^T w = 0, \qquad Ax = b$$

- 因此 $x^*(t)$最小化**L** 数

$$L(x, \lambda^\star(t), \nu^\star(t)) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^\star(t) f_i(x) + \nu^\star(t)^T (Ax - b)$$

- 其中 定 $\lambda_i^\star(t) = 1/(-t f_i(x^\star(t)))$ and $\nu^\star(t) = w/t$
- 这 认了直 的想法 $f_0(x^\star(t)) \to p^\star$

中心路 的对 点

- $x = x^*(t)$ 在w满

$$t\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{-f_i(x)}\nabla f_i(x) + A^T w = 0, \qquad Ax = b$$

- 因此 $x^*(t)$最小化**L** 数

$$L(x, \lambda^\star(t), \nu^\star(t)) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^\star(t) f_i(x) + \nu^\star(t)^T(Ax - b)$$

- 其中 定 $\lambda_i^\star(t) = 1/(-t f_i(x^\star(t)))$ and $\nu^\star(t) = w/t$
- 这 认了直 的想法 $f_0(x^\star(t)) \to p^\star$

$$\begin{aligned} p^\star &\geq g(\lambda^\star(t), \nu^\star(t)) \\ &= L(x^\star(t), \lambda^\star(t), \nu^\star(t)) \\ &= f_0(x^\star(t)) - m/t \end{aligned}$$

于**KK** 条件的解

于KK 条件的解

- [$x = x^\star(t)$, $\lambda = \lambda^\star(t)$, $\nu = \nu^\star(t)$

于KK 条件的解

- $x = x^\star(t),\ \lambda = \lambda^\star(t),\ \nu = \nu^\star(t)$ 满
- 原 $f_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m,\ Ax = b$

于KK 条件的解

- $x = x^\star(t),\ \lambda = \lambda^\star(t),\ \nu = \nu^\star(t)$ 满
- 原 $f_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m,\ Ax = b$
- 对 $\lambda \succeq 0$

于KK 条件的解

- $x = x^\star(t),\ \lambda = \lambda^\star(t),\ \nu = \nu^\star(t)$ 满
- 原 $f_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m,\ Ax = b$
- 对 $\lambda \succeq 0$
- 条件 $-\lambda_i f_i(x) = 1/t,\ i = 1, \ldots, m$

于KK 条件的解

- $x = x^\star(t),\ \lambda = \lambda^\star(t),\ \nu = \nu^\star(t)$ 满
- 原 $f_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m,\ Ax = b$
- 对 $\lambda \succeq 0$
- 条件 $-\lambda_i f_i(x) = 1/t,\ i = 1, \ldots, m$
- **L** 数的 度

于KK 条件的解

- $x = x^\star(t),\ \lambda = \lambda^\star(t),\ \nu = \nu^\star(t)$ 满
- 原 $f_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m,\ Ax = b$
- 对 $\lambda \succeq 0$
- 条件 $-\lambda_i f_i(x) = 1/t,\ i = 1, \ldots, m$
- **L** 数的 度

$$\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x) + A^T \nu = 0$$

于KK 条件的解

- $x = x^\star(t)$, $\lambda = \lambda^\star(t)$, $\nu = \nu^\star(t)$ 满
- 原 $f_i(x) \le 0$, $i = 1, \ldots, m$, $Ax = b$
- 对 $\lambda \succeq 0$
- 条件 $-\lambda_i f_i(x) = 1/t$, $i = 1, \ldots, m$
- **L** 数的 度

$$\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x) + A^T \nu = 0$$

- 和**KK** 的不同是条件**3** 了 $\lambda_i f_i(x) = 0$

法

法

算法 11.1　障碍方法。

给定严格可行点 x，$t := t^{(0)} > 0$，$\mu > 1$，误差阈值 $\epsilon > 0$。

重复进行

1. **中心点步骤。**
   从 x 开始，在 $Ax = b$ 的约束下极小化 $tf_0 + \phi$，最终确定 $x^\star(t)$。
2. **改进。** $x := x^\star(t)$。
3. **停止准则。** 如果 $m/t < \epsilon$ 则退出。
4. **增加 t。** $t := \mu t$。

法

算法 11.1　障碍方法。

给定严格可行点 x，$t := t^{(0)} > 0$，$\mu > 1$，误差阈值 $\epsilon > 0$。

重复进行

1. **中心点步骤。**
   从 x 开始，在 $Ax = b$ 的约束下极小化 $tf_0 + \phi$，最终确定 $x^\star(t)$。
2. **改进。** $x := x^\star(t)$。
3. **停止准则。** 如果 $m/t < \epsilon$ 则退出。
4. **增加 t。** $t := \mu t$。

- 终结时 $f_0(x) - p^\star \le \epsilon$　　条件来自 $f_0(x^\star(t)) - p^\star \le m/t$

法

算法 11.1　障碍方法。

给定严格可行点 x，$t := t^{(0)} > 0$，$\mu > 1$，误差阈值 $\epsilon > 0$。

重复进行

1. **中心点步骤。**
   从 x 开始，在 $Ax = b$ 的约束下极小化 $tf_0 + \phi$，最终确定 $x^\star(t)$。
2. **改进。** $x := x^\star(t)$。
3. **停止准则。** 如果 $m/t < \epsilon$ 则退出。
4. **增加 t。** $t := \mu t$。

- 终结时 $f_0(x) - p^\star \le \epsilon$ 条件来自 $f_0(x^\star(t)) - p^\star \le m/t$
- 使用 方法完成中心点 从当前点x开始

法

算法 11.1　障碍方法。

给定严格可行点 x，$t := t^{(0)} > 0$，$\mu > 1$，误差阈值 $\epsilon > 0$。

重复进行

1. **中心点步骤。**
   从 x 开始，在 $Ax = b$ 的约束下极小化 $tf_0 + \phi$，最终确定 $x^\star(t)$。
2. **改进。** $x := x^\star(t)$。
3. **停止准则。** 如果 $m/t < \epsilon$ 则退出。
4. **增加 t。** $t := \mu t$。

- 终结时 $f_0(x) - p^\star \le \epsilon$ 条件来自 $f_0(x^\star(t)) - p^\star \le m/t$
- 使用 方法完成中心点 从当前点x开始
- μ的选 需要 取大表 少的外部 更多的内部
  通常 为 $\mu = 10–20$

法

算法 11.1　障碍方法。

给定严格可行点 x，$t := t^{(0)} > 0$，$\mu > 1$，误差阈值 $\epsilon > 0$。

重复进行

1. **中心点步骤。**
   从 x 开始，在 $Ax = b$ 的约束下极小化 $tf_0 + \phi$，最终确定 $x^\star(t)$。
2. **改进。** $x := x^\star(t)$。
3. **停止准则。** 如果 $m/t < \epsilon$ 则退出。
4. **增加 t。** $t := \mu t$。

- 终结时 $f_0(x) - p^\star \le \epsilon$ 条件来自 $f_0(x^\star(t)) - p^\star \le m/t$
- 使用 方法完成中心点 从当前点x开始
- μ的选 需要 取大表 少的外部 更多的内部 通常 为 $\mu = 10$–20
- 始点选 有很多 发

收　性分

收　性分

- 外部　　　的次数　精　的

收 性分

- 外部 的次数 精 的

$$\left\lceil \frac{\log(m/(\epsilon t^{(0)}))}{\log \mu} \right\rceil$$

收 性分

- 外部 的次数 精 的

$$\left\lceil \frac{\log(m/(\epsilon t^{(0)}))}{\log \mu} \right\rceil$$

- 加上 始化中心点

$$\text{minimize} \quad t f_0(x) + \phi(x)$$

收 性分

- 外部 的次数 精 的

$$\left\lceil \frac{\log(m/(\epsilon t^{(0)}))}{\log \mu} \right\rceil$$

- 加上 始化中心点
- 中心点 minimize $tf_0(x)+\phi(x)$

收　性分

- 外部　　　的次数　精　的

$$\left\lceil \frac{\log(m/(\epsilon t^{(0)}))}{\log \mu} \right\rceil$$

- 加上　始化中心点
- 中心点　minimize　$tf_0(x)+\phi(x)$
- 见　　　法的收　性分

收 性分

- 外部 的次数 精 的

$$\left\lceil \frac{\log(m/(\epsilon t^{(0)}))}{\log \mu} \right\rceil$$

- 加上 始化中心点
- 中心点 minimize $t f_0(x) + \phi(x)$
- 见 法的收 性分
- 对 $t \geq t^{(0)}$ $t f_0 + \phi$ 必 有 的下水平

收 性分

- 外部 的次数 精 的

$$\left\lceil \frac{\log(m/(\epsilon t^{(0)}))}{\log \mu} \right\rceil$$

- 加上 始化中心点
- 中心点 minimize $tf_0(x) + \phi(x)$
- 见 法的收 性分
- 对 $t \geq t^{(0)}$ $tf_0 + \phi$ 必 有 的下水平
- 经 分 需要强 性 **L** 条件

收　性分

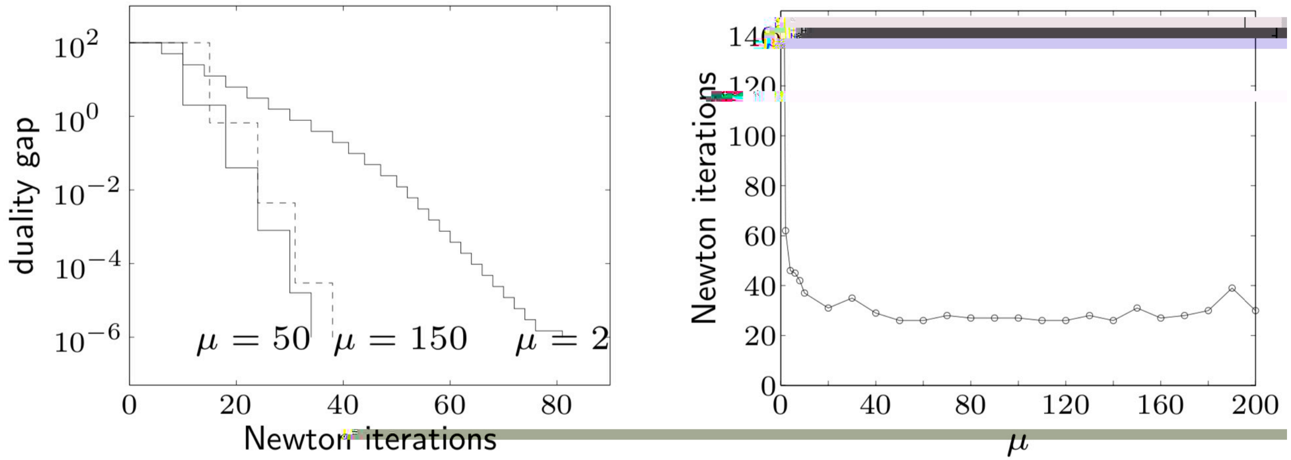
- 外部　　的次数　精　的

$$\left\lceil \frac{\log(m/(\epsilon t^{(0)}))}{\log \mu} \right\rceil$$

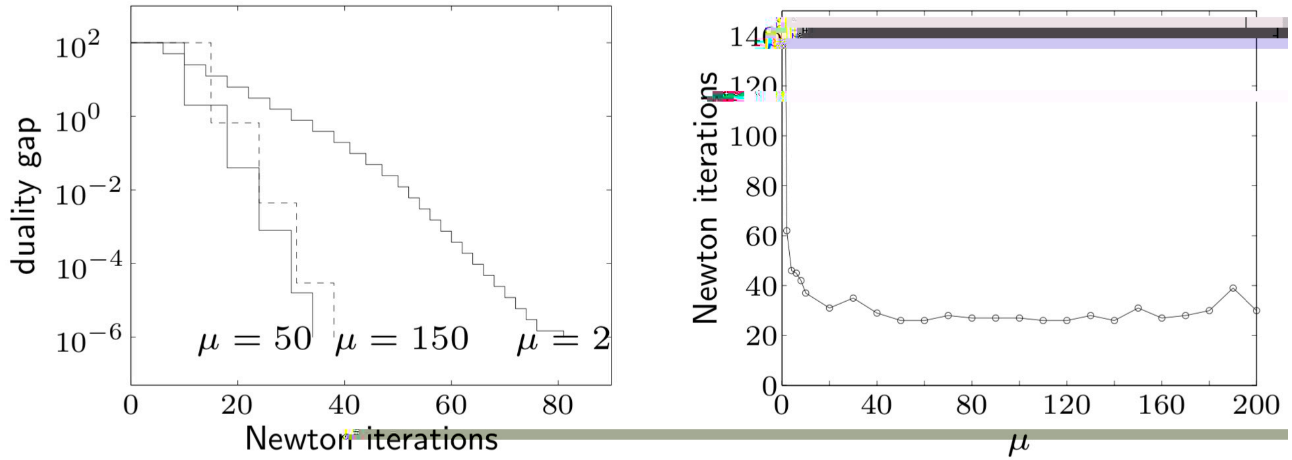
- 加上　始化中心点
- 中心点　minimize　$tf_0(x) + \phi(x)$
- 见　　　法的收　性分
- 对　$t \geq t^{(0)}$　　$tf_0 + \phi$ 必　有　的下水平
- 经　分　需要强　性　**L**　　　条件
- 　于自　应的分　需要 $tf_0 + \phi$ 为自　应　数

- 不等　　　　　的线性　　　　m=100个不等　　　n=50个　化变量

❑ 不等 的线性 *m*=100个不等 *n*=50个 化变量

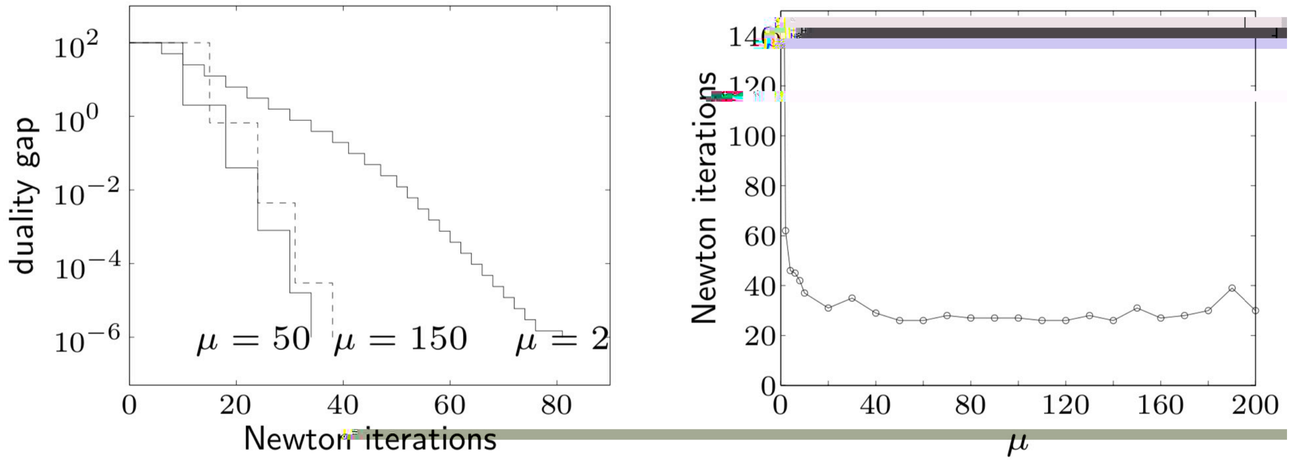


❑ 不等 的线性 *m*=**100**个不等 *n*=**50**个 化变量



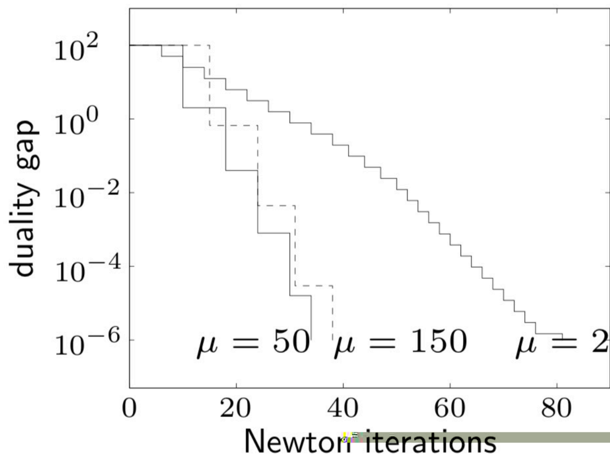
❑ 从中心路 的点*x*开始 $t^{(0)} = 1$ 对 间 为**100**

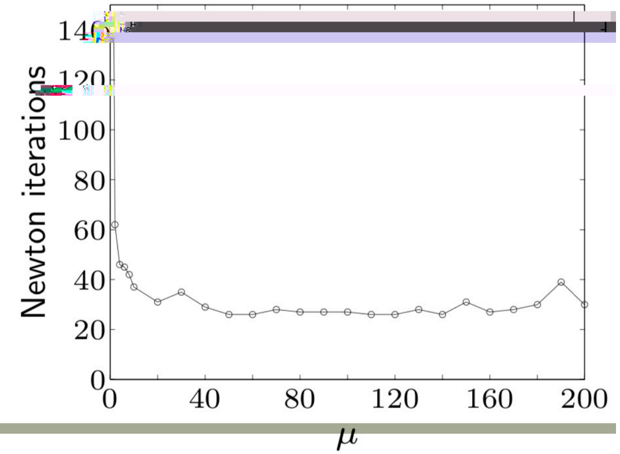
- 不等 的线性 *m*=100个不等 *n*=50个 化变量



- 从中心路 的点x开始 $t^{(0)} = 1$ 对 间 为**100**
- 当t=10^8时

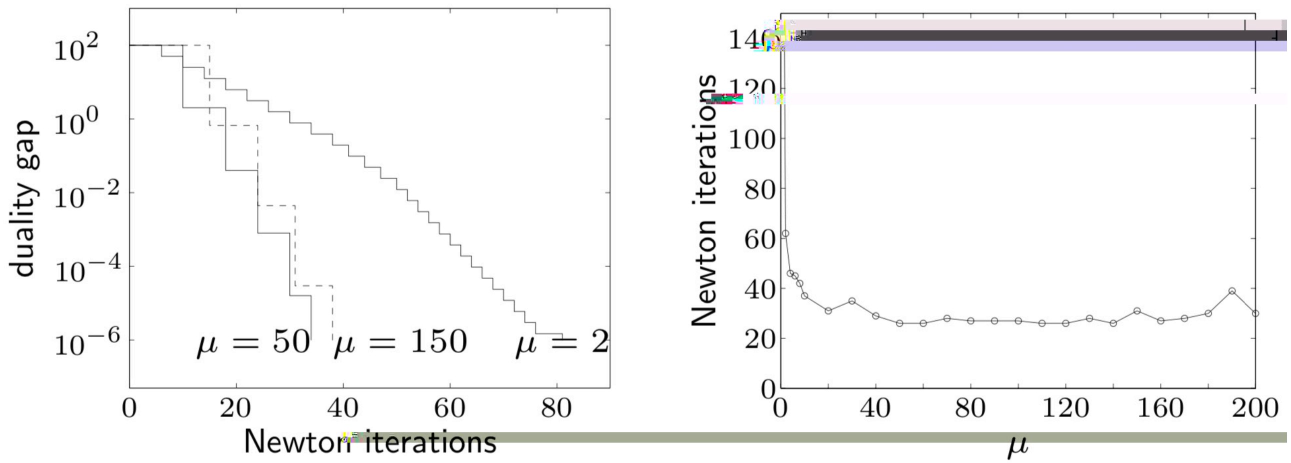
- 不等 的线性 m=100个不等 n=50个 化变量





- 从中心路 的点x开始 $t^{(0)}=1$ 对 间 为100
- 当t=10^8时
- 中心点 使用带回 的 法

- 不等 的线性 m=100个不等 n=50个 化变量



- 从中心路 的点x开始 $t^{(0)} = 1$ 对 间 为100
- 当t=10^8时
- 中心点 使用带回 的 法
- $\mu \geq 10$ 法的 体 代次数不会太 感

一　　　　的线性

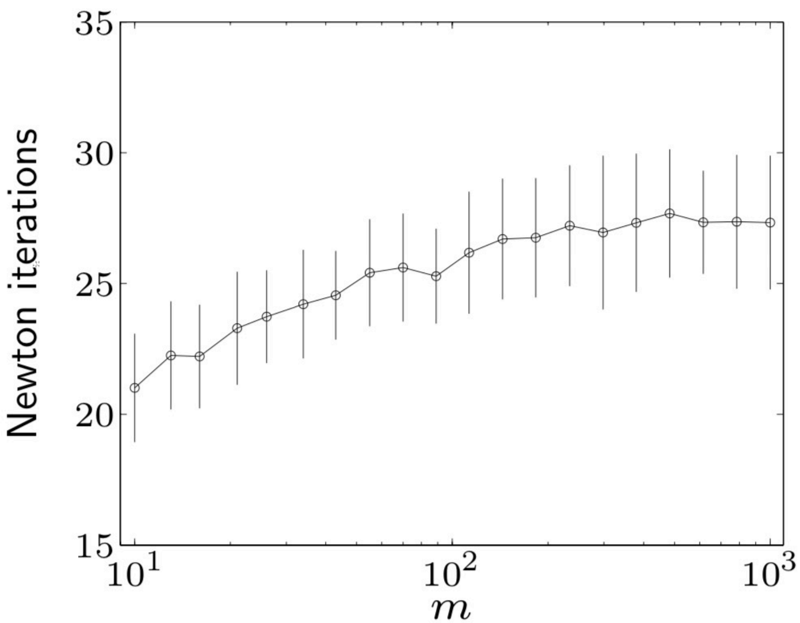
一　　　　的线性

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^T x \\
\text{subject to} & Ax = b, \quad x \succeq 0
\end{array}
$$

一　　　的线性

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & Ax = b, \quad x \succeq 0 \end{array}$$

- m=10　…　1000　对每一个m　求解100个随机生成的实



- 当问题维数变化比　为**100:1**时　　代次数增长的　为

可行性和　　1方法

可行性和 1方法

- 可行性问题　　找x满　$f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad Ax = b$

可行性和 1方法

- 可行性问题 找x满 $f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad Ax = b$
- 1:为 法计算 可行的起始点

可行性和　　1方法

可行性和　　1方法

- 可行性问题　　找x满　$f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad Ax = b$
- 　　1:为　　法计算　　可行的起始点
- 　本　　1方法

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize (over } x, s) & s \\
\text{subject to} & f_i(x) \le s, \quad i = 1, \ldots, m \\
& Ax = b
\end{array}
$$

可行性和 1方法

- 可行性问题 找x满 $f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad Ax = b$
- 1:为 法计算 可行的起始点
- 本 1方法

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize (over } x,\ s\text{)} & s \\
\text{subject to} & f_i(x) \le s, \quad i = 1, \ldots, m \\
 & Ax = b
\end{array}
$$

- x s可行 $s<0$ x是 格可行的

可行性和 1方法

- 可行性问题 找x满 $f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad Ax = b$
- 1:为 法计算 可行的起始点
- 本 1方法

$$\begin{array}{ll} \text{minimize (over } x, s) & s \\ \text{subject to} & f_i(x) \le s, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b \end{array}$$

- x s可行 $s<0$ x是 格可行的
- 最 为正 问题为非可行性的

可行性和　　1方法

- 可行性问题　　找x满　$f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \qquad Ax = b$
- 　1:为　　法计算　　可行的起始点
- 　本　　**1**方法

$$\begin{array}{ll} \text{minimize (over } x,\ s) & s \\ \text{subject to} & f_i(x) \le s, \quad i = 1, \dots, m \\ & Ax = b \end{array}$$

- x　s可行　　$s<0$　　x是　格可行的
- 最　　为正　　问题为非可行性的
- 最　　为**0**　　在　　问题为可行的　但不是格可行的

可行性和 1方法

- 可行性问题 找x满 $f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad Ax = b$
- 1:为 法计算 可行的起始点
- 本 1方法

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize (over } x,\ s) & s \\
\text{subject to} & f_i(x) \le s, \quad i = 1, \ldots, m \\
 & Ax = b
\end{array}
$$

- x s可行 $s<0$ x是 格可行的
- 最 为正 问题为非可行性的
- 最 为0 在 问题为可行的 但不是格可行的
- 最 为0 不可 问题为非可行的

不可行　之和

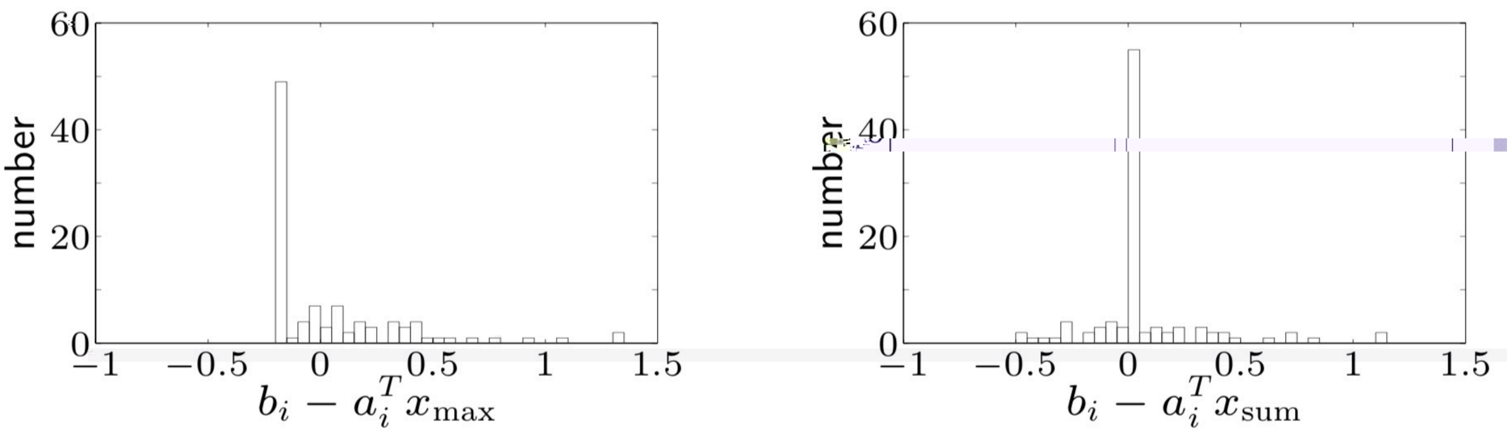
不可行 之和

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \mathbf{1}^T s \\
\text{subject to} & s \succeq 0, \quad f_i(x) \le s_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
& Ax = b
\end{array}
$$

不可行 之和

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \mathbf{1}^T s \\
\text{subject to} & s \succeq 0, \quad f_i(x) \le s_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
 & Ax = b
\end{array}
$$

- 对不可行点 比 本 **1**方法 生满 更多不等 的解
- 由**50**个变量和**100**个线性不等 成的不可行



- 图 本 **1**方法 满 **39**个不等
- 图 不可行 之和 满 **79**个不等

一　线性不等

一　线性不等

$$Ax \preceq b + \gamma \Delta b$$

一　线性不等

$$Ax \preceq b + \gamma\Delta b$$

- 所需的数　对 $\gamma > 0$ 是　格可行的　对 $\gamma \le 0$ 是不可行的

一　线性不等

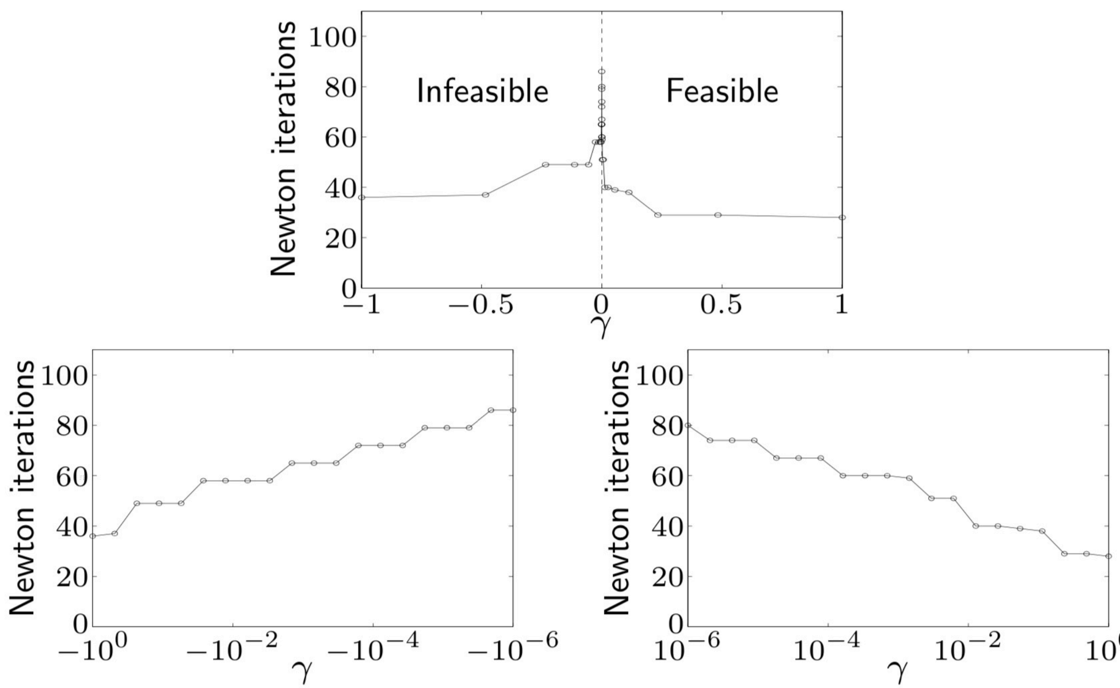
$$Ax \preceq b + \gamma \Delta b$$

- 所需的数　对 $\gamma > 0$ 是　格可行的　对 $\gamma \leq 0$ 是不可行的
- 使用　本　　**1**方法　当 $s < 0$ 或对　目　为正时　结

一　线性不等

$$Ax \preceq b + \gamma \Delta b$$

- 所需的数　对 $\gamma > 0$ 是　格可行的　对 $\gamma \le 0$ 是不可行的
- 使用　本　　**1**方法　当 $s < 0$ 或对　目　为正时　结



$\log(1/|\gamma|)$

于自和　条件的　　性分

于自和　条件的　　　性分

于自和　条件的　　　性分

-
- 水平子　有界

于自和　条件的　　性分

-
- 水平子　有界
- 所有的 $tf_0+\phi$ 为自和　　数　　是　的

于自和　条件的　　　性分

-
- 水平子　有界
- 所有的 $tf_0+\phi$ 为自和　　数　　　是　的
  - 对线性　　　　　二次　　　等很多问题　成

于自和 条件的 性分

-
- 水平子 有界
- 所有的 $tf_0+\phi$ 为自和 数 是 的
  - 对线性 二次 等很多问题 成
  - 或 需要重 化问题

于自和 条件的 性分

-
- 水平子 有界
- 所有的 $tf_0 + \phi$ 为自和 数 是 的
  - 对线性 二次 等很多问题 成
  - 或 需要重 化问题

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \\
\text{subject to} & Fx \preceq g
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \\
\text{subject to} & Fx \preceq g, & x \succeq 0
\end{array}
$$

- 可用于 性分 当不 用自和 条件时
  法 然有

中心点 的 代次数

中心点 的 代次数

- 自和 理论

中心点 的 代次数

- 自和 理论

$$\#\text{Newton iterations} \le \frac{\mu t f_0(x) + \phi(x) - \mu t f_0(x^+) - \phi(x^+)}{\gamma} + c$$

$$\#\text{Newton iterations} \le \frac{\mu t f_0(x) + \phi(x) - \mu t f_0(x^+) - \phi(x^+)}{\gamma} + c$$

中心点 的 代次数

- 自和 理论

$$\#\text{Newton iterations} \le \frac{\mu t f_0(x) + \phi(x) - \mu t f_0(x^+) - \phi(x^+)}{\gamma} + c$$

- 以 $x = x^\star(t)$ 为起始点计算 $x^+ = x^\star(\mu t)$ 的代价上界
- γ, c 为常数 取 于很多 算法参数

中心点 的 代次数

- 自和 理论

$$\#\text{Newton iterations} \le \frac{\mu t f_0(x) + \phi(x) - \mu t f_0(x^+) - \phi(x^+)}{\gamma} + c$$

- 以 $x = x^\star(t)$ 为起始点计算 $x^+ = x^\star(\mu t)$ 的代价上界
- γ, c 为常数 取 于很多 算法参数
- 对 性 其中 $\lambda = \lambda^\star(t)$, $\nu = \nu^\star(t)$

中心点 的 代次数

- 自和 理论

$$\#\text{Newton iterations} \leq \frac{\mu t f_0(x) + \phi(x) - \mu t f_0(x^+) - \phi(x^+)}{\gamma} + c$$

- 以 $x = x^\star(t)$ 为起始点计算 $x^+ = x^\star(\mu t)$ 的代价上界
- γ, c 为常数 取 于很多 算法参数
- 对 性 其中 $\lambda = \lambda^\star(t)$, $\nu = \nu^\star(t)$

$$\begin{aligned}
&\mu t f_0(x) + \phi(x) - \mu t f_0(x^+) - \phi(x^+) \\
&\quad = \mu t f_0(x) - \mu t f_0(x^+) + \sum_{i=1}^{m} \log(-\mu t \lambda_i f_i(x^+)) - m \log \mu \\
&\quad \leq \mu t f_0(x) - \mu t f_0(x^+) - \mu t \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x^+) - m - m \log \mu \\
&\quad \leq \mu t f_0(x) - \mu t g(\lambda, \nu) - m - m \log \mu \\
&\quad = m(\mu - 1 - \log \mu)
\end{aligned}$$

总的　　　　　　代次数

总的　　　　代次数

$$\#\text{Newton iterations} \leq N = \left\lceil \frac{\log(m/(t^{(0)}\epsilon))}{\log \mu} \right\rceil \left(\frac{m(\mu - 1 - \log \mu)}{\gamma} + c \right)$$

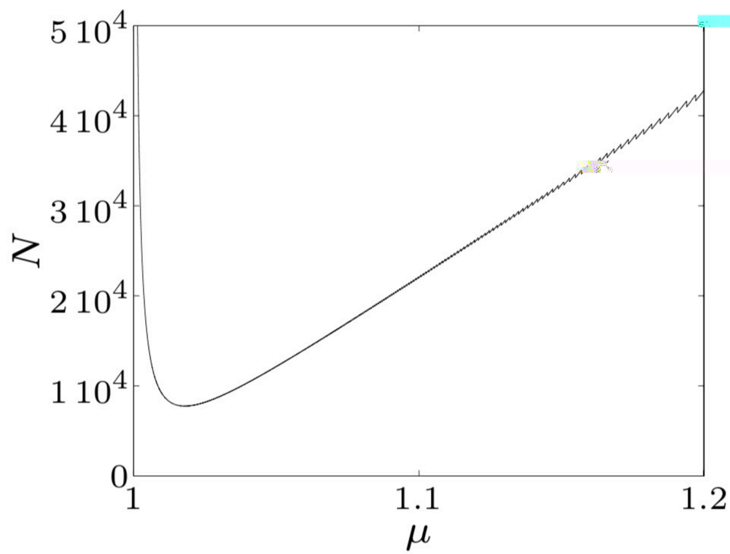


figure shows N for typical values of γ, c,

$$m = 100, \qquad \frac{m}{t^{(0)}\epsilon} = 10^5$$

总的　　代次数

$$\#\text{Newton iterations} \le N = \left\lceil \frac{\log(m/(t^{(0)}\epsilon))}{\log \mu} \right\rceil \left(\frac{m(\mu - 1 - \log \mu)}{\gamma} + c \right)$$

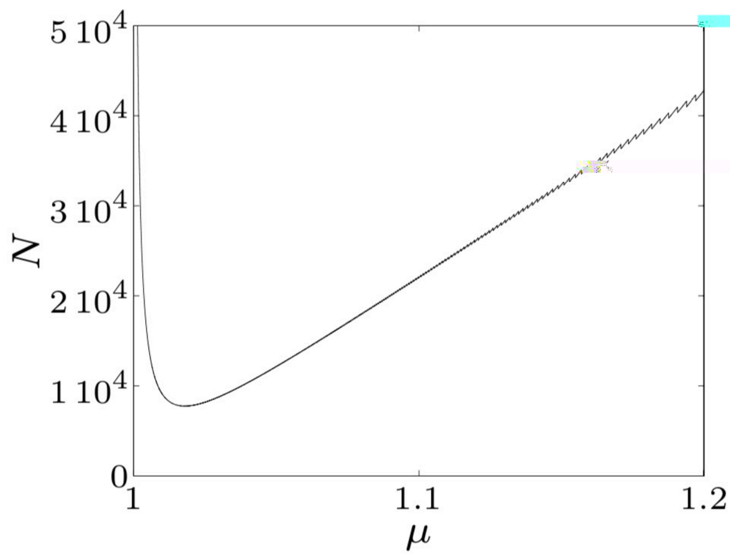


figure shows N for typical values of γ, c,

$$m = 100, \qquad \frac{m}{t^{(0)}\epsilon} = 10^5$$

- 认关于参数 μ 的

总的 代次数

$$\#\text{Newton iterations} \leq N = \left\lceil \frac{\log(m/(t^{(0)}\epsilon))}{\log \mu} \right\rceil \left(\frac{m(\mu - 1 - \log \mu)}{\gamma} + c \right)$$

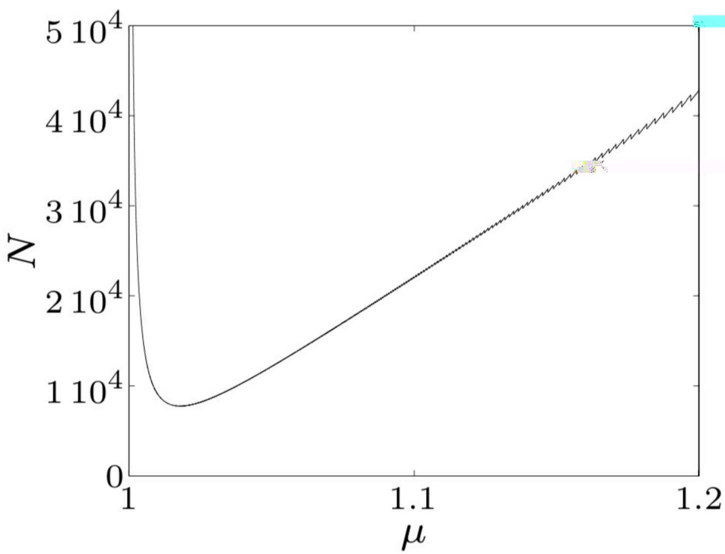


figure shows N for typical values of γ, c,

$$m = 100, \qquad \frac{m}{t^{(0)}\epsilon} = 10^5$$

- 认关于参数 μ 的
- 实 上 代参数数十次的量, 当 $\mu \geq 10$ 不 感

法的多 度

法的多 度

- $\mu = 1 + 1/\sqrt{m}$:

法的多 度

- $\mu = 1 + 1/\sqrt{m}$:

$$N = O\left(\sqrt{m}\log\left(\frac{m/t^{(0)}}{\epsilon}\right)\right)$$

法的多 度

- $\mu = 1 + 1/\sqrt{m}$:

$$N = O\left(\sqrt{m}\log\left(\frac{m/t^{(0)}}{\epsilon}\right)\right)$$

- 定间 的 法的 代次数为 $O(\sqrt{m})$
- 以一次 代的代价 得到 点运算次数的上界

法的多 度

- $\mu = 1 + 1/\sqrt{m}$;

$$N = O\left(\sqrt{m}\log\left(\frac{m/t^{(0)}}{\epsilon}\right)\right)$$

- 定间 的 法的 代次数为 $O(\sqrt{m})$
- 以一次 代的代价 得到 点运算次数的上界
- μ 的选 化了最 情 的 性 事实上 μ 为 定

原-对　内点法

原-对　内点法

- 当需要高性能时　比　　　法更为有

原-对　内点法

- 当需要高性能时　比　　法更为有
- 每次　代更新原问题和对　问题的变量　不分内部和外部　代

原-对　内点法

- 当需要高性能时　比　　法更为有
- 每次　代更新原问题和对　问题的变量　不分内部和外部　代
- 通常　现出超线性收　性质

原-对 内点法

- 当需要高性能时 比 法更为有
- 每次 代更新原问题和对 问题的变量 不分内部和外部 代
- 通常 现出超线性收 性质
- 方向可以理解为 方向 来处理 改的**KK** 条件

原-对　内点法

- 当需要高性能时　比　　法更为有
- 每次　代更新原问题和对　问题的变量　不分内部和外部　代
- 通常　现出超线性收　性质
- 　　方向可以理解为　　　　方向　来处理　改的**KK**　条件
- 可以从非可行点开始

原-对 内点法

- 当需要高性能时 比 法更为有
- 每次 代更新原问题和对 问题的变量 不分内部和外部 代
- 通常 现出超线性收 性质
- 方向可以理解为 方向 来处理 改的**KK** 条件
- 可以从非可行点开始
- 每次 代的计算代价和 法相同